数理解析研究所講究録
975 巻 1996 年 28-42



# 歪みを許した時の複雑度とレート歪み関数

(Complexity at Fixed Distortion Level and Rate-Distortion Function)

NTT コミュニケーション科学研究所　村松 純 (Jun Muramatsu)
湘南工科大学工学部情報工学科　金谷 文夫 (Fumio Kanaya)

概要

有限列の複雑度を量る概念として Kolmogorov の複雑度等が知られている. これらの複雑度が持つ性質を抽出して新たに複雑度関数という概念を定義した. さらに有限列を許された歪みの範囲内で記述したときの情報量として, 歪みを許した時の複雑度の概念を定義した. 一方で情報理論の世界では歪みを許す圧縮の限界としてレート歪み関数という量が知られている. 本論文において, 情報源が離散時間定常エルゴード過程に従っている時に系列の 1 文字あたりの歪みを許した時の複雑度と情報源のレート歪み関数が系列の長さを大きくすることによって漸近的に等価になることを証明する. また複雑度を制限した時に生じる歪みと歪みレート関数に関しても同様の考察をする.

## 1　はじめに

複雑度 (complexity) は有限集合を値とする有限列に対して, その列の “複雑さ” や “乱雑さ” を表す量である. この量は, 始めに有限列全体の集合上の関数である複雑度関数 (complexity function) が定義され, そしてこの関数による値として定義される. 歴史的に複雑度と呼ばれるものには, Kolmogorov-Chaitin 複雑度 (cf. [7], [2]) や Lempel-Ziv 複雑度 (cf. [8]) などが挙げられる. そして, これらの複雑度はそれぞれの複雑度関数の値として定義することができる. ここで, 私たちは一般的に複雑度関数と呼ばれるものはどのような性質を持つべきであるかという点に注目し, 新たに複雑度関数を定義した. この定

義のもとで, 私たちは複雑度関数と定常エルゴード情報源に対する無歪みユニバーサル符号の間には符号長関数が同じものを同一視すれば1対1の対応がつくことが示される.

列の歪みを許した時の複雑度 (complexity at fixed distortion level[1] ) はこの列に定められた歪みを与えた列の集合の中での複雑度の最小値として定義される. そして列が定常エルゴード過程に従っている時, 1文字当たりの歪みを許した時の複雑度は, 列の長さが長くなるにつれてその確率過程のレート歪み関数 (rate-distortion function) に近づくことを証明した. 同様に, 複雑度を制限した時に生じる歪み (distortion at fixed complexity level) と歪みレート関数 (distortion-rate function) の同等性に関しても証明した.

Yang と Shen (cf. [12]) は Kolmogorov-Chaitin 複雑度に対して, 歪みを許した時の複雑度を定義し, レート歪み関数との間に同様の関係が成り立つことを証明している. Yang と Kieffer (cf. [14]) もまた, Lempel-Ziv 符号の符号長関数に対して歪みを許した時の複雑度とレート歪み関数および複雑度を制限した時に生じる歪みと歪みレート関数の関係について同様の結果を得ている. 今回の結果はこれらを一般の複雑度にまで拡張したものとなっており, 私たちの証明は彼らの結果の別証明を与えている.

今回証明された結果を利用すると任意の複雑度関数もしくは無歪みユニバーサル符号から歪みを許すユニバーサル符号を構成することができる (cf. [9],[10],[11]).

## 2 複雑度

全体を通して, 確率過程 (情報源) は離散時間とする. $\hat{A}$ を有限集合とし, $\hat{A}^* \equiv \cup_{i=1}^{\infty} \hat{A}^i$ とする. これは $\hat{A}$ の元を値とする有限列全体の集合である. $\hat{A}^*$ の元に対する複雑度は以下で定義される複雑度関数の値として定義される.

**定義 1:** 次の2つの条件を満たす関数 $L : \hat{A}^* \to \mathbb{N}$ を複雑度関数と呼ぶ.

1) $\displaystyle\sum_{\hat{x}^* \in \hat{A}^*} 2^{-L(\hat{x}^*)} \leq 1.$

2) 任意の $\hat{A}$ 値定常エルゴード過程 $\hat{X} = \{\hat{X}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} L(\hat{x}^n) \leq H_{\hat{X}} \quad \mu_{\hat{X}}\text{-a.s.}$$

[1] [9],[10],[11] ではこれを 'distortion-complexity' と呼んでいるが, ここではこの呼び名を用いない.

が成立する．ここで，$\mu_{\hat{X}}$ を $\hat{X}$ と対応する $\hat{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ 上の確率測度とする．また，

$$H_{\hat{X}} \equiv \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E_{\mu^n_{\hat{X}}}\left\{\log_2\frac{1}{\mu^n_{\hat{X}}(\hat{X}^n)}\right\}$$

は定常過程 $\hat{X}$ のエントロピーレート (entropy rate) と呼ばれ，これは歪みを許さない情報圧縮レートの漸近的限界値として知られている．ここで，$E_{\mu^n_{\hat{X}}}$ は $\hat{X}^n$ と対応する $\hat{\mathcal{A}}^n$ 上の確率測度 $\mu^n_{\hat{X}}$ による期待値を表す．

以下で複雑度関数と $\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード情報源に対する無歪み無歪みユニバーサル符号の間の関係について議論する．$\mathcal{B} \equiv \{0,1\}$ とすると，無歪みユニバーサル符号は $\hat{\mathcal{A}}$ から $\mathcal{B}^*$ への一意解読性 (cf. [3], pp. 80–81) を持つ単射で，全ての $\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード情報源に対してその符号化レートがその情報源のエントロピーレートまで近づくことを保証するものである．ここでユニバーサル符号は VV(variable-to-variable) 符号とするが，定義の条件 1)を

$$\sum_{\hat{x}^n\in\hat{\mathcal{A}}^n} 2^{-L(\hat{x}^n)} \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

にかえれば，ユニバーサル符号を FV(fixed-to-variable) 符号として平行な議論を行なうことができる．符号化の観点からいうと，FV 符号の方が系列の長さの符号化を省略できるため，符号化効率がよいが，漸近的な性能には影響しない．

$l : \mathcal{B}^* \to \mathbb{N}$ を 2 進数列の長さを与える関数とする．この時，無歪みユニバーサル符号の性質より次のことがいえる．

**定理 1:** $\mathcal{U} : \hat{\mathcal{A}}^* \to \mathcal{B}^*$ を $\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード情報源に対する無歪みユニバーサル符号とすると，

$$L^{\mathcal{U}} \equiv l \circ \mathcal{U}$$

は複雑度関数になる．

**証明:** 無歪みユニバーサル符号の定義より明らか． □

次の定理と定理 1 より，$\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード情報源に対する無歪みユニバーサル符号と，複雑度関数の間には，符号長関数が同じ符号を同一視すれば，1 対 1 の対応がつくことがわかる．

**定理 2:** 任意の複雑度関数 $L$ に対して, それを符号長関数として持つ $\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード情報源に対する無歪みユニバーサル符号 $\mathcal{U}^L$ が存在する.

**証明:** $L$ を符号長関数と見ると条件 1) より $L$ に対応する一意解読性を満たす符号が存在する (cf. [3], Theorem 5.2.2). 条件 2) と情報源符号化逆定理 (cf. [1], Theorem 3.1, [3], Theorem 15.7.1) より, これは $\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード情報源に対する無歪みユニバーサル符号となる. □

以下に複雑度関数の例を挙げる.

**Kolmogorov-Chaitin 複雑度関数** あるプログラム言語を一つ固定する. ここで, プログラムは $\mathcal{B}^*$ の元で表現されているとする. この時 Kolmogorov-Chaitin 複雑度関数 $L^{\mathrm{KC}}$ は以下で定義される関数である (cf. [7], [2], または [3], pp. 147–148).

$$L^{\mathrm{KC}}(\hat{x}^n) \equiv \min_{p \in \mathrm{Program}(\hat{x}^n)} l(p), \quad \hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n$$

ここで, $\mathrm{Program}(\hat{x}^n)$ は $\hat{x}^n$ を出力するプログラム全体の集合である. これは複雑度関数の定義を満たすことが知られている (cf. [13], Theorem 2).

**増分分解による Lempel-Ziv 符号の符号長関数** 最初に $\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n$ を次のような部分列 $\hat{x}_1^{n_1} \hat{x}_{n1+1}^{n_2} \cdots \hat{x}_{n_{t(\hat{x})}+1}^{n_{t(\hat{x})+1}}$ に分解する.

$$n_1 \equiv 1,$$

$$n_{i+1} \equiv \max\{k;\ k \leq n-1 \text{ かつ } \hat{x}_{n_i+1}^k \in \{\lambda, \hat{x}_1^{n_1}, \ldots, \hat{x}_{n_i+1}^{n_i^i}\}\} + 1, \quad 1 \leq i \leq t(\hat{x}) - 1,$$

$$n_{t(\hat{x})+1} \equiv n,$$

ここで, $\lambda$ は空列を表し, $t(\hat{x})$ は上記の $n_{i+1} (\leq n-2)$ が存在する最大の添字である. この時, $L^{\mathrm{LZ}}(\hat{x})$ を

$$L^{\mathrm{LZ}}(\hat{x}) \equiv \sum_{i=1}^{t(\hat{x})+1} \lceil \log_2\{i|\hat{\mathcal{A}}|\} \rceil, \quad \hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n$$

で定義すると, これは複雑度関数となる (cf. [15] または [3], Theorem 12.10.2).

## 3 歪みを許した時の複雑度

$\hat{\mathcal{A}}$ を有限集合, $\mathcal{A}$ を標準空間 (standard space, cf. [4]) とする. 標準空間のクラスは離散集合のクラスのほかに完備可分距離空間のクラスを含んでいる. 歪み関数 $\rho : \mathcal{A} \times \hat{\mathcal{A}} \to [0, \infty)$ は以下の性質を満たしているものとする.

1) $\rho$ は可測関数.

2) 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ に対してある $\hat{x}_X \in \hat{\mathcal{A}}$ および実数 $\rho^*$ が存在して,

$$E_{\mu_X} \rho(X_0, \hat{x}_X) < \rho^* < \infty.$$

$D_{\min} \equiv \sup_{x \in \mathcal{A}} \inf_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}} \rho(x, \hat{x})$ とする. そして歪み $D \geq D_{\min}$ を固定する. $\mathcal{A}^*$ の元に対する歪み $D$ を許した時の複雑度は以下で定義される. 歪みを許した時の複雑度関数の値として定義される.

**定義 2:** 複雑度関数 $L$ から導かれる歪み $D \geq D_{\min}$ を許した時の複雑度関数 $L_D : \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}$ を次のように定義する. $x^n \in \mathcal{A}^n$ に対して

$$L_D(x^n) \equiv \min_{\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}_D^n(x^n)} L(\hat{x}^n).$$

ここで,

$$\hat{\mathcal{A}}_D^n(x^n) \equiv \left\{ \hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n ; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, \hat{x}_i) \leq D \right\}.$$

$D \geq D_{\min}$ より, $\hat{\mathcal{A}}_D^n(x^n)$ は空集合でないことが保証されている.

直観的にいえば, $x^* \in \mathcal{A}^*$ の元に対する歪み $D$ を許した時の複雑度 は各々の列を $D$ を越えない程度の歪みでその列を記述する時に必要な情報量を表す.

歪みを許した時の複雑度とレート歪み関数の関係を述べる前に, レート歪み関数 (rate-distortion function) と歪みレート関数 (distortion-rate function) の定義を述べておく.

**定義 3:** $\mathcal{A}$ 値定常過程 $X$ に対してそのレート歪み関数 $R_X(\cdot)$ と歪みレート関数 $D_X(\cdot)$ を次のように定義する. $D > D_{\min}$, $R > 0$ に対して,

$$R_X(D) \equiv \lim_{n \to \infty} \inf_{p^n \in \mathcal{P}_D^n} \frac{1}{n} I(X^n ; \hat{X}^n),$$

$$D_X(R) \equiv \lim_{n\to\infty} \inf_{p^n \in \mathcal{P}_R^n} E_{p^n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i, \hat{X}_i)\right\}.$$

ここで,

$$\mathcal{P}_D^n \equiv \left\{p^n;\ \begin{array}{l} p^n \text{ は確率ベクトル } X^n,\ \hat{X}^n \text{ を成分として持つ } \mathcal{A}^n \times \hat{\mathcal{A}}^n \text{ 上の確率測} \\ \text{度で, } \mu_X^n \text{ を周辺分布として持ち,} \\ \qquad E_{p^n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i, \hat{X}_i)\right\} \le D \\ \text{を満たす.} \end{array}\right\},$$

$$\mathcal{P}_R^n \equiv \left\{p^n;\ \begin{array}{l} p^n \text{ は確率ベクトル } X^n,\ \hat{X}^n \text{ を成分として持つ } \mathcal{A}^n \times \hat{\mathcal{A}}^n \text{ 上の確率測} \\ \text{度で、 } \mu_X^n \text{ を周辺分布として持ち、} \\ \qquad \frac{1}{n}I(X^n; \hat{X}^n) \le R \\ \text{を満たす。} \end{array}\right\}$$

である. また, $I(X^n; \hat{X}^n)$ は確率ベクトル $X^n$, $\hat{X}^n$ の間の相互情報量 (mutual information)

$$I(X^n; \hat{X}^n) \equiv \sup_{\mathcal{F}} \sum_{F_i^n \times \hat{F}_i^n \in \mathcal{F}} p^n(F_i^n \times \hat{F}_i^n) \log_2 \frac{p^n(F_i^n \times \hat{F}_i^n)}{\mu_X^n(F_i^n)\mu_{\hat{X}}^n(\hat{F}_i^n)}$$

である. ここで, 上限は $F_i^n \subset \mathcal{A}^n$, $\hat{F}_i^n \subset \hat{\mathcal{A}}^n$, $F_i^n \times \hat{F}_i^n \subset \mathcal{A}^n \times \hat{\mathcal{A}}^n$ がそれぞれ $\mu_X$, $\mu_{\hat{X}}$, $p^n$ に関して可測集合であるようなすべての分割 $\mathcal{F}$ に関してとる. もしも $\mathcal{P}_D^n$, $\mathcal{P}_R^n$ が空集合である時はそれぞれ $\inf_{p^n \in \mathcal{P}_D^n} \frac{1}{n} I(X^n; \hat{X}^n) = \infty$, $\inf_{p^n \in \mathcal{P}_R^n} E_{p^n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i, \hat{X}_i)\right\} = \infty$ であるとする.

歪み $D$ のレート歪み関数は歪み $D$ を許す情報圧縮レートの漸近的限界値を示しており, レート $R$ の歪みレート関数は符号化レート $R$ を固定した時の情報圧縮において生じる歪みの漸近的な限界値を示している. またレート歪み関数と歪みレート関数は互いに逆関数の関係にある.

歪みを許した時の複雑度とレート歪み関数の間には次の関係がある.

**定理 3** (cf. [9], Theorem 3.1): 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ と $D > D_{\min}$ に対して, $L$ が複雑度関数であれば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} L_D(x^n) = R_X(D) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

証明は次節で行なう.

## 4 定理 3の証明

定理を下からの評価と上からの評価に分けて証明する. 下からの評価では, 条件 1)を用い, 上からの評価では, 条件 2)を用いる.

### 4.1 下からの評価

はじめに, 次の補題を用意する.

**補題 1** (cf. [6], Theorem 2)**:** 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ および $D > D_{\min}$ に対して, $\phi_n : \mathcal{A}^n \to \hat{\mathcal{A}}^n$ が,

$$\sup_{x^n \in \mathcal{A}^n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, [\phi_n(x^n)]_i) \leq D$$

を満たせば, 任意の 1 対 1 写像 $\psi_n : \hat{\mathcal{A}}^n \to \mathcal{B}_{\mathrm{p}}^*$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} l(\psi_n(\phi_n(x^n))) \geq R_X(D) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ. ここで, $[\phi_n(x^n)]_i$ は $\phi_n(x^n) \in \hat{\mathcal{A}}^n$ の $i$ 番目の要素を表し, $\mathcal{B}_{\mathrm{p}}^*(\subset \mathcal{B}^*)$ は語頭 (prefix) 条件を満たし, $|\mathcal{B}_{\mathrm{p}}^*| \geq |\hat{\mathcal{A}}^n|$ を満たす任意の集合とする.

これを用いて, 下からの評価を与える.

**補題 2:** 任意の複雑度関数 $L$ および $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ と $D > D_{\min}$ に対して,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} L_D(x^n) \geq R_X(D) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

証明:

$$\begin{aligned}
\phi_n(x^n) &\equiv \arg \min_{\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}_D^n(x^n)} L(\hat{x}^n) \\
\psi_n(\hat{x}^n) &\equiv \mathcal{U}^L(\hat{x}^n)
\end{aligned}$$

とすれば, 定義の条件 1)よりこれは補題1の条件を満たす. したがって,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}L_D(x^n) &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}L(\phi_n(x^n)) \\ &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}l(\psi_n(\phi_n(x^n))) \\ &\geq R_X(D) \quad \mu_X\text{-a.s.}\end{aligned}$$

である. □

## 4.2 上からの評価

上からの評価をする前に, 次の補題を用意する.

**補題 3** (cf. [5], Theorem 11.4.1, 11.7.2, 11.8.1): 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ と任意の $R>0, \varepsilon>0$ に対してある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ と写像 $f^{N_\varepsilon}: \mathcal{A}^{2N_\varepsilon+1} \to \hat{\mathcal{A}}$ が存在して, $\hat{X} \equiv \{\hat{X}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を

$$\hat{X}_n \equiv f^{N_\varepsilon}(X_{n-N_\varepsilon}, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+N_\varepsilon})$$

で定めるとこれは $\hat{\mathcal{A}}$ 値定常エルゴード過程となり,

$$\begin{aligned}E_{\mu_X}\{\rho(X_0,\hat{X}_0)\} &\leq D_X(R)+\varepsilon \quad \mu_X\text{-a.s.} \\ H(\hat{X}) &\leq R\end{aligned}$$

以上の補題を用いて, 次の補題を証明する.

**補題 4:** 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ と $D \geq D_{\min}$ に対して, $L$ が複雑度関数であれば,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}L_D(x^n) \leq R_X(D) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

**証明**: $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード過程 $X$ と $D \geq D_{\min}$ を固定する. 補題3より, 任意の $0<\varepsilon<(D-D_{\min})/2$ に対して, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ および, $f^{N_\varepsilon}$ が存在して,

$$E_{\mu_X}\{\rho(X_0,\hat{X}_0)\} \leq D_X(R_X(D-2\varepsilon))+\varepsilon$$

$$\leq \quad D - \varepsilon \tag{1}$$

$$H_{\hat{X}} \quad \leq \quad R_X(D - 2\varepsilon) \tag{2}$$

ここで, 式 (1) と個別エルゴード定理より, $\mu_X$-a.s. $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ で最初に定めた $\varepsilon$ に対してある $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n > n_{\varepsilon,x}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i, \hat{x}_i) &\leq E_{\mu_X}\{\rho(X_0, \hat{X}_0)\} + \varepsilon \\ &\leq D \end{aligned}$$

となる. 歪みを許した時の複雑度関数の定義より, $\mu_X$-a.s. $x$ で最初に定めた $\varepsilon$ に対してある $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n > n_{\varepsilon,x}$ に対して $\hat{x}^n \in \hat{A}^n_D(x^n)$, すなわち,

$$\frac{1}{n}L_D(x^n) \leq \frac{1}{n}L(\hat{x}^n)$$

である.

ところで, $\hat{X}$ は $\hat{A}$ 値定常エルゴード過程になるから, 複雑度関数の定義の条件 2) と式 (2) より,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}L_D(x^n) &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}L(\hat{x}^n) \quad \mu_X\text{-a.s.} \\ &\leq H_{\hat{X}} \quad \mu_X\text{-a.s.} \\ &\leq R_X(D - 2\varepsilon) \quad \mu_X\text{-a.s.} \end{aligned}$$

となる. ここで, $\varepsilon \to 0$ とすると, rate-distortion function の連続性より,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}L_D(x^n) \leq R_X(D) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

となる. □

## 5 複雑度を制限した時に生じる歪み

この節では, 歪み複雑度と双対な概念として, 複雑度を制限した時に生じる歪みの定義を与える. 以下では, あらかじめ複雑度関数 $L$ が一つ固定されているとする. $c > 0$ とす

ると, $x^n \in \mathcal{A}^n$ の 複雑度を $c$ に制限した時に生じる歪みは, 以下で定義される複雑度を $c$ に制限した時に生じる歪み関数 $\Delta_{L,c} : \mathcal{A}^* \to [0,\infty)$ の値として定義される.

**定義 4:** $c > 0$ に対して複雑度を $c$ に制限した時に生じる歪み関数 $\Delta_{L,c} : \hat{\mathcal{A}}^* \to [0,\infty)$ を次のように定義する.

$$\Delta_{L,c}(x^n) \equiv \begin{cases} \min\limits_{\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n_{L,c}} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, \hat{x}_i), & n \in \mathbb{N}, \qquad \text{if } \hat{\mathcal{A}}^n_{L,c} \neq \emptyset, \\ \infty, & \qquad\qquad\quad \text{if } \hat{\mathcal{A}}^n_{L,c} = \emptyset. \end{cases}$$

ここで, $\hat{\mathcal{A}}^n_{L,c} \equiv \{\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n;\ L(\hat{x}^n) \leq c\}$ とする.

$x^n$ の複雑度を $c$ に制限した時に生じる歪みは, $x^n$ を表現するための情報量 $c$ を固定したときに, どの程度歪みが発生するかを表わす指標である.

このとき, 定理3と双対の定理となる, 次の定理が成立する.

**定理 4** (cf. [11], Theorem 3.1): 任意の $R > 0$ および任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード情報源に $X$ 対して,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) = D_X(R), \qquad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

この定理は, 列の長さ $n \in \mathbb{N}$ に比例して複雑度をを増大させるとき, 複雑度を $nR$ に制限した時に生じる歪みは $n$ とともに歪みレート関数 $D_X(R)$ に収束することを表わしている.

証明は次節で行う.

## 6 定理 4の証明

証明の方針は定理3の証明とほとんど同じである. 証明は上からの評価と下からの評価に分けて行われる.

### 6.1 上からの評価

上からの評価をする前に次の補題を用意する.

**補題 5** (cf. [6], Theorem 1): 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード情報源 $X$ および $R > 0$ に対して、$\hat{\mathcal{C}}^n \subset \hat{\mathcal{A}}^n$ を $|\hat{\mathcal{C}}^n| \leq 2^{nR}$ を満たす任意の集合とすると,

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{C}}^n} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, \hat{x}_i) \geq D_X(R) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

**補題 6** (cf. [10], Lemma 2): $c > 0$ にたいして,

$$|\hat{\mathcal{A}}^n_{L,c}| \leq 2^{c+1}$$

が成り立つ.

これらを用いて, 下からの評価を与える.

**補題 7:** 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード情報源 $X$ および $R > 0$ に対して,

$$\liminf_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) \geq D_X(R), \qquad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

**証明**: $\hat{\mathcal{C}}^n = \hat{\mathcal{A}}^n_{L,nR}$ と置くと, 補題6によって, $|\hat{\mathcal{A}}^n_{L,nR}| \leq 2^{nR+1}$ となる. ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$ なるすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\hat{\mathcal{A}}^n_{L,nR}| \leq 2^{n(R+\varepsilon)}$ となるので, 補題5を適用して,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) &= \liminf_{n\to\infty} \min_{\hat{x}n \in \hat{\mathcal{C}}^n} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, \hat{x}_i) \\ &\geq D_X(R+\varepsilon), \qquad \mu_X\text{-a.s.}\end{aligned}$$

となる. ここで $\varepsilon \to 0$ とすると, 歪みレート関数の連続性より,

$$\liminf_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) \geq D_X(R), \qquad \mu_X\text{-a.s.}$$

となる. □

## 6.2 上からの評価

補題3を用いて次の補題を証明する.

**補題 8:** 任意の $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード情報源 $X$ と $D \geq D_{\min}$ に対して, $L$ が複雑度関数であれば,

$$\limsup_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) \leq D_X(R) \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

**証明:** $\mathcal{A}$ 値定常エルゴード情報源 $X$ と $R > 0$ を固定する. 補題3より, 任意の $0 < \varepsilon$ に対して, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ および, $f^{N_\varepsilon}$ が存在して,

$$E_{\mu_X}\{\rho(X_0, \hat{X}_0)\} \leq D_X(R-\varepsilon) + \varepsilon \tag{3}$$

$$H_{\hat{X}} \leq R - \varepsilon \tag{4}$$

ここで, 複雑度関数の定義の条件 2)と式 (4) より, $\mu_X$-a.s. $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ で最初に定めた $\varepsilon$ に対してある $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n > n_{x,\varepsilon}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}L(\hat{x}^n) &\leq H_{\hat{X}} + \varepsilon \\ &\leq R \end{aligned}$$

が成り立つ. これより, $L(\hat{x}^n) \leq nR$ すなわち $\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{A}}^n_{L,nR}$ となる. 従って, 複雑度を制限した時に生じる歪み関数の定義より, $\mu_X$-a.s. $x$ で任意の $n > n_{x,\varepsilon}$ に対して

$$\Delta_{L,nR}(x^n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, \hat{x}_i)$$

が成り立つ.

次に, 式 (3) と個別エルゴード定理より, $\mu_X$-a.s. $x$ で最初に定めた $\varepsilon$ に対してある $n'_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n > n'_{x,\varepsilon}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, \hat{x}_i) &\leq E_{\mu_X}\{\rho(X_0, \hat{X}_0)\} + \varepsilon \\ &\leq D_X(R-\varepsilon) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

となる.

従って, $\mu_X$-a.s. $x$ で任意の $n > \max\{n_{\varepsilon,x}, n'_{\varepsilon,x}\}$ に対して

$$\Delta_{L,nR}(x^n) \leq D_X(R-\varepsilon) + 2\varepsilon$$

である. ここで, $\limsup_{n\to\infty}$ をとった後に $\varepsilon \to 0$ とすると, 歪みレート関数の連続性より,

$$\limsup_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) \le D_X(R) \qquad \mu_X\text{-a.s.}$$

となる. □

## 7 確率過程のクラスに関する考察

複雑度関数に関わる多くの未解決な問題のなかで, 定理 3,4が成り立つためには複雑度関数の条件 2)にどのようなものが必要かという問題がある. この問題に関しては次の定理が知られている. しかしながら, これ以外の関係は現在のところ知られていない.

**定理 5:** $L$ が次の条件を満たしているものとする.

1) $\sum_{\hat{x}^* \in \hat{A}^*} 2^{-L(\hat{x}^*)} \le 1.$

2) 任意の $\hat{A}$ 値 B-process $\hat{X} = \{\hat{X}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} L(\hat{x}^n) \le H_{\hat{X}}, \quad \mu_{\hat{X}}\text{-a.s.}$$

が成立する.

この時、任意の $\mathcal{A}$ 値独立同分布確率過程 $X$ と $D > D_{\min}$, $R > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} L_D(x^n) = R_X(D), \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{L,nR}(x^n) = D_X(R), \quad \mu_X\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

**証明**: 補題 4, 補題 8の証明において, $X$ が独立同分布確率過程の時 $\hat{X}$ は B-process になる (cf. [5] pp. 191–194) ので, 証明は定理 3, 定理 4のものとほぼ同様である. □

## 8 結論

個々の有限列の乱雑さをはかるために複雑度関数に基づいた複雑度と歪みを許した時の複雑度を定義した. 始めに, 複雑度関数と無歪みユニバーサル符号との間には 1 対 1 の対応があることを示した. 複雑度関数の概念は無歪みユニバーサル符号の一般的な性質を

抽象化したもので, これによって個々の無歪みユニバーサル符号の構造を解析することなくその定量的な性質を解析することができる. 次に, これを用いて, 歪みを許した時の複雑度とレート歪み関数の間の同等性を示した. この定理によって, 任意の無歪みユニバーサル符号を用いた歪みを許すユニバーサル符号の構成が保証される.

また, 複雑度を制限した時に生じる歪みの概念を定義し, これと歪みレート関数の同等性も示した.

## 参考文献


[1] A. R. Barron, "Logically smooth density estimation," Ph.D. thesis, Stanford University, Stanford, CA, 1985.

[2] G. J. Chaitin, "On the length of programs for computing finite sequences," *J. ACM*, vol. 13, No. 4, pp. 547–569, 1966.

[3] T. M. Cover and J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

[4] R. M. Gray, *Probability, Random Processes, and Ergodic Properties*, Springer-Verlag, 1988.

[5] R. M. Gray, *Entropy and Information Theory*, Springer-Verlag, 1990.

[6] J. C. Kieffer, "Sample Converses in Source Coding Theory," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-37, pp. 263–268, Mar. 1991.

[7] A. N. Kolmogorov, "Three approaches to the quantitative definition of information," *Problems of Information Transmission*, vol. 1, pp. 4–7, 1965.

[8] A. Lempel and J. Ziv, "On the complexity of finite sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-22, pp. 75–81, Jan. 1976.

[9] J. Muramatsu and F. Kanaya, "Distortion-complexity and rate-distortion function," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E77-A, No. 8, pp. 1224–1229, 1994.

[10] J. Muramatsu and F. Kanaya, "A universal data-base for data compression," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E78-A, No. 9, pp. 1057–1062, Sep. 1995.

[11] J. Muramatsu and F. Kanaya, "The dual quantity of the distortion-complexity and a universal data-base for fixed-rate data compression with distortion," to appear in *IEICE Trans. Fundamentals.*

[12] E.H. Yang and S.Y. Shen, "Distortion program-size complexity with respect to a fidelity criterion and rate-distortion function," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-39, pp. 288–292, Jan. 1993.

[13] E.H. Yang, "The proof of Levin's conjecture," *Chinese Sci. Bull.*, vol. 34, pp. 1761–1765, Nov. 1989.

[14] E.H. Yang and J. C. Kieffer, "Simple universsal lossy data compression schemes derived from Lempel-Ziv algorithm," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-42, pp. 239–245, Jan. 1996.

[15] J. Ziv and A. Lempel, "Compression of individual sequences by variable rate coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-24, pp. 530–536, Sep. 1978.